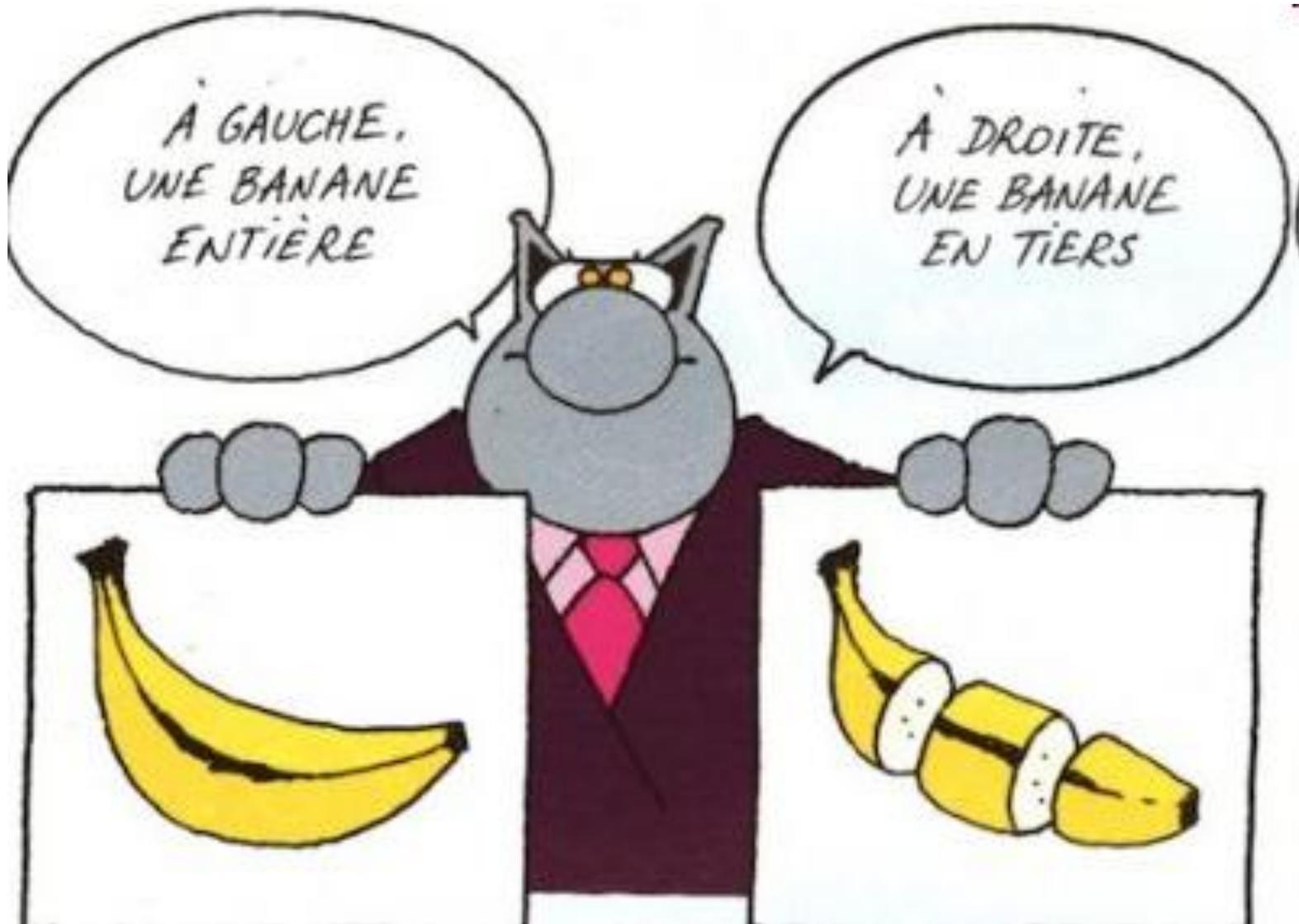
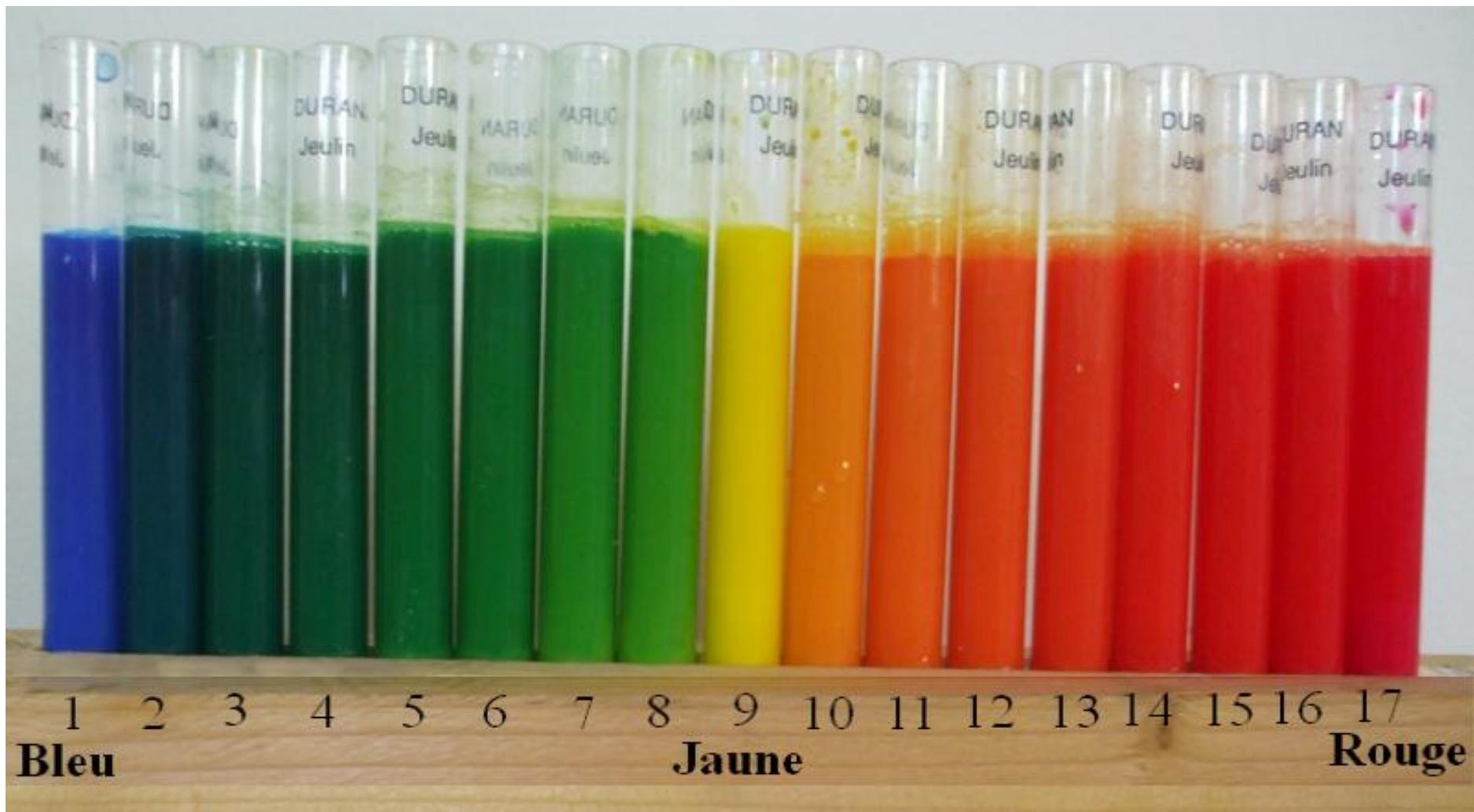


# Des fractions aux nombres décimaux



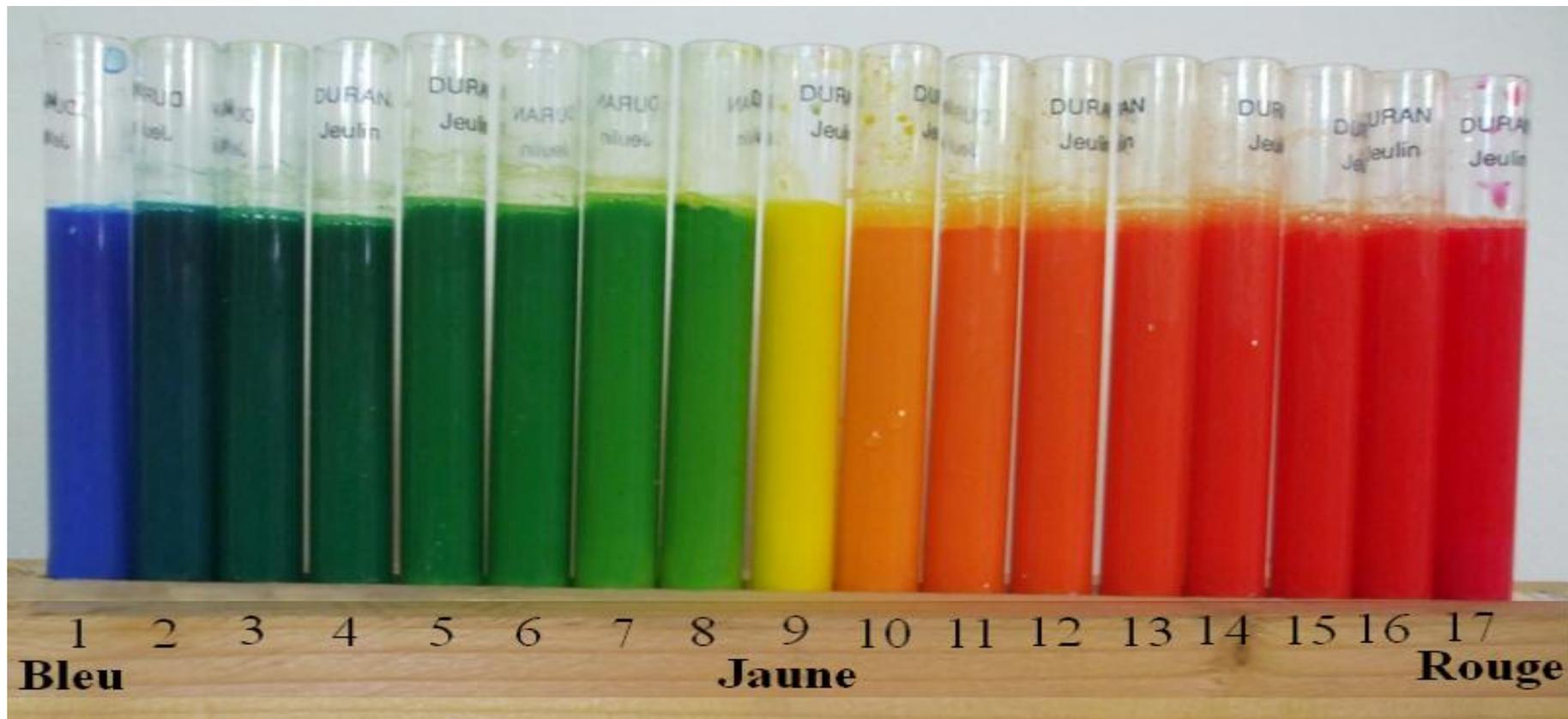
**Philippe-Alain DEGUILHAUME**

*Animateur Formateur Départemental Mathématiques Sciences et Développement Durable*

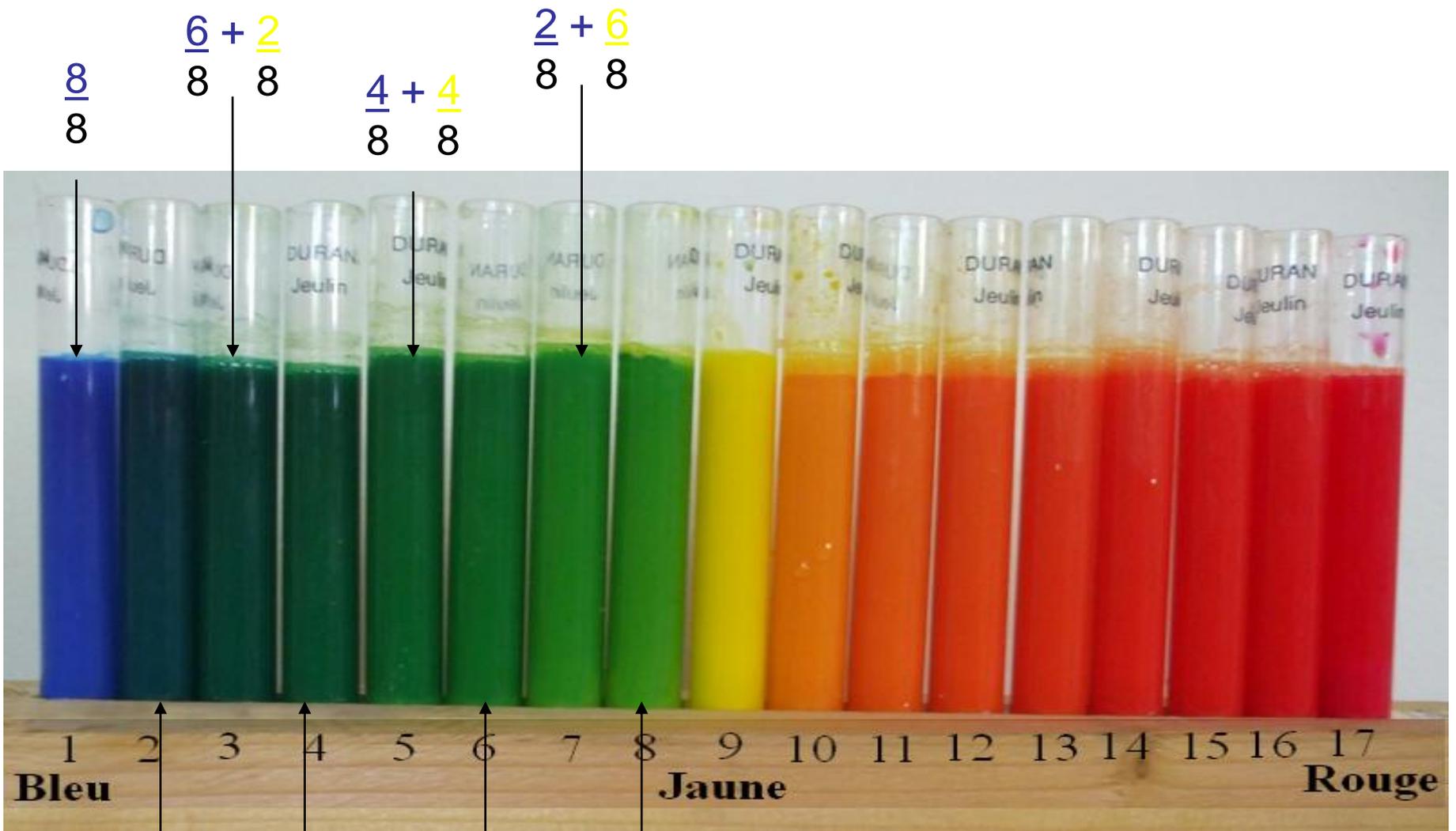


Voici un nuancier fait à partir de 3 couleurs primaires.  
*Comment a-t-on procédé pour obtenir la couleur du tube n 6 ?*

Il y a du bleu dans 8 tubes.



Il y a de moins en moins de bleu dans les tubes.

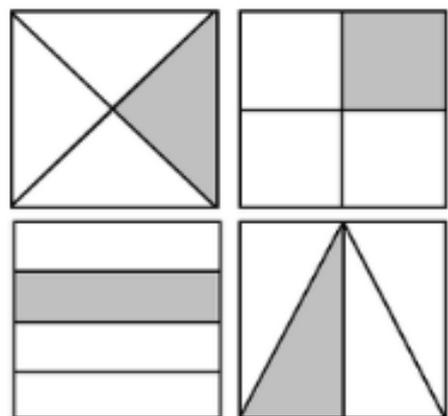


$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8}$$

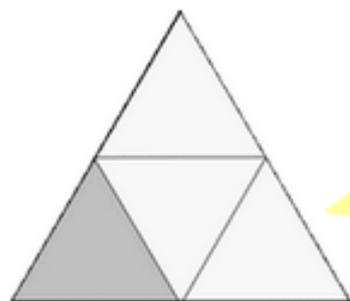
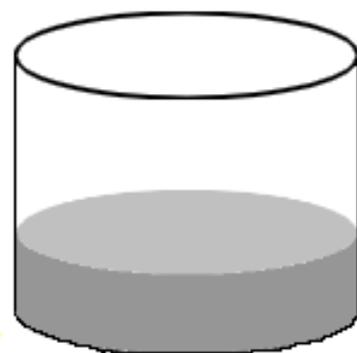
$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$$

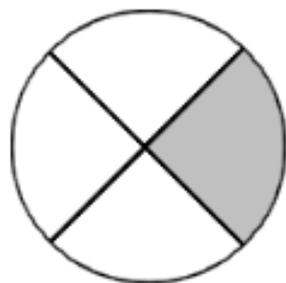
$$\frac{1}{8} + \frac{7}{8}$$



$$1 \div 4$$



un quart



$$1/4$$

$$\frac{25}{100}$$

0,25

$$\frac{1}{4}$$



## **Les nombres décimaux et les fractions**

### **fractions simples et décimales :**

- écriture,
- encadrement entre deux nombres entiers consécutifs,
- écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1,
- somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur

## Fractions

- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
- Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.
- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.
- Écrire une fraction sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

- désignations orales et écritures chiffrées,
- valeur des chiffres en fonction de leur position,
- passage de l'écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement,
- comparaison et rangement,
- repérage sur une droite graduée ;
- valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème).
- Savoir les repérer, les placer sur une droite graduée.
- Savoir les comparer, les ranger.
- Savoir encadrer un nombre décimal non entier par deux nombres entiers consécutifs.
- Produire des décompositions en utilisant 10 ; 100 ; 1000... et 0,1 ; 0,01.
- Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
- Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.

# Les fractions simples ? Usuelles ?

$\frac{1}{2}$  litre

$\frac{1}{2}$  heure

$\frac{1}{2}$  baguette

$\frac{1}{2}$  euro ?

Garçon un demi !

$\frac{3}{4}$  de minute

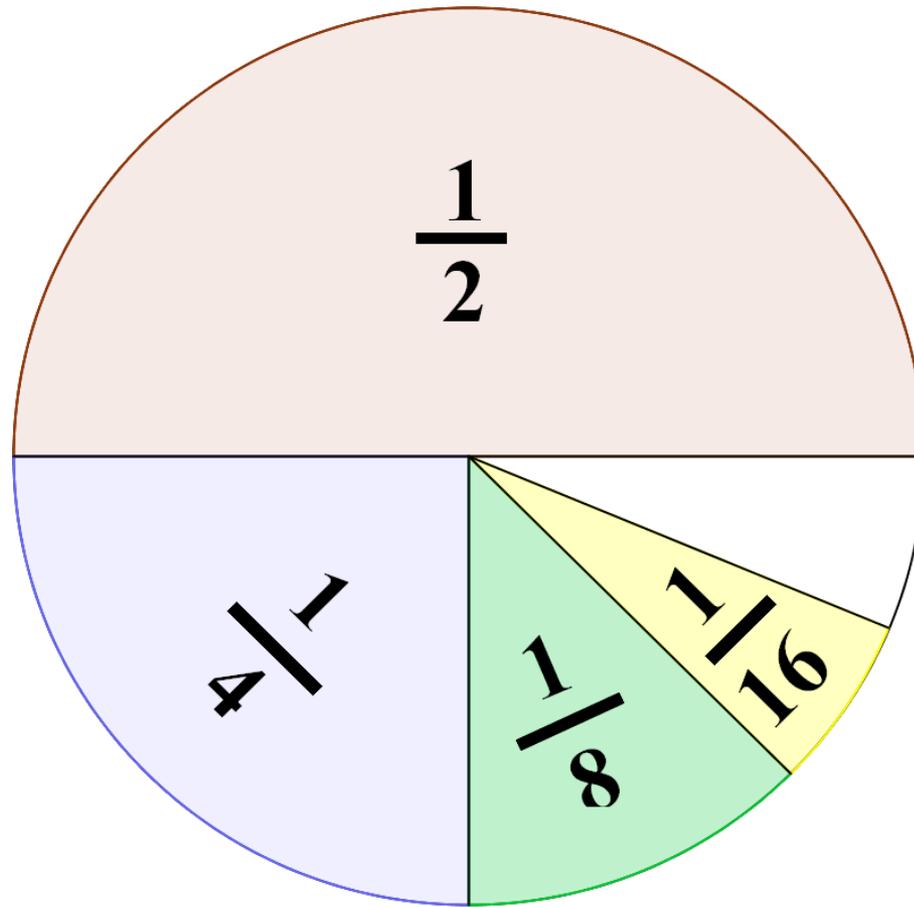
$\frac{1}{4}$  litre

$\frac{1}{4}$  de  
kilogramme ?

Le tiers  
provisionnel

$\frac{1}{10}$  de  
secondes

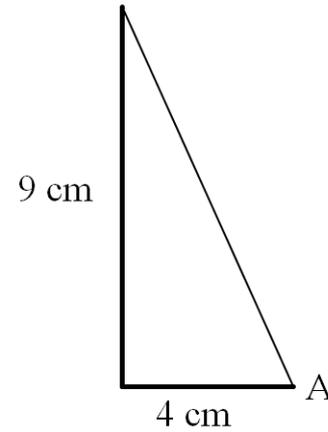
$\frac{10}{100}$  d'euro ?



Fractions unitaires à dénominateur puissance de 2



***Proportion***



***Rapport***

$$\frac{9}{4}$$



***Partition de la pluralité***



***Fractionnement de l'unité***



Lorsqu'elles sont empilées, ces 7 feuilles cartonnées ont une épaisseur de 10 mm.

Quelle est l'épaisseur exacte de chaque feuille ?

Entre 1 et 2 mm

$\approx 1,4$  mm

1,42857429 mm

$$\frac{10}{7} \text{ mm}$$

$$1 + \frac{3}{7} \text{ mm}$$

1

$\frac{1}{2}$

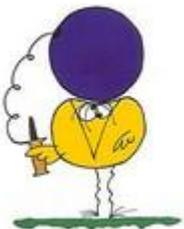
$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{8}$



## Comment aborder la fraction ?

1 Approche procédurale ? .....

2 Approche fonctionnelle ? .....

3 Approche par sauts ? .....

4 Approche par la mesure ? .....

Approche par un système de mesures mesure ? .....

5 Approche par partage d'un segment ? .....

# 1 Approche procédurale ? .....

Une fraction désigne **une division à effectuer.**

$$\frac{7}{4}$$

Action de diviser 7 par 4

## Attention

*Dans cette approche la fraction n'est pas un nombre mais une procédure visant à atteindre un nombre décimal aussi proche que l'on veut de  $7/4$ .*

$$7/4 = 1,75$$

## 2 Approche fonctionnelle ? .....

La fraction désigne une chaîne d'opérateurs.

$\frac{7}{4}$  C'est ... x par 7 et par 4  
Ou  
C'est ... par 4 et x par 7

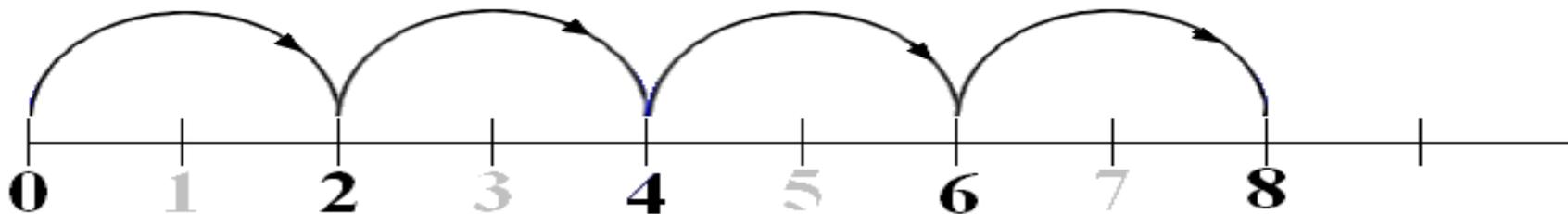
### Attention

*Le nombre  $\frac{7}{4}$  et la fraction  $x \frac{7}{4}$   
sont deux objets de nature différentes.*

### 3 Approche par sauts ? .....

En partant du point 0, on passe par le nombre « n » après un certain nombre « s » de sauts.

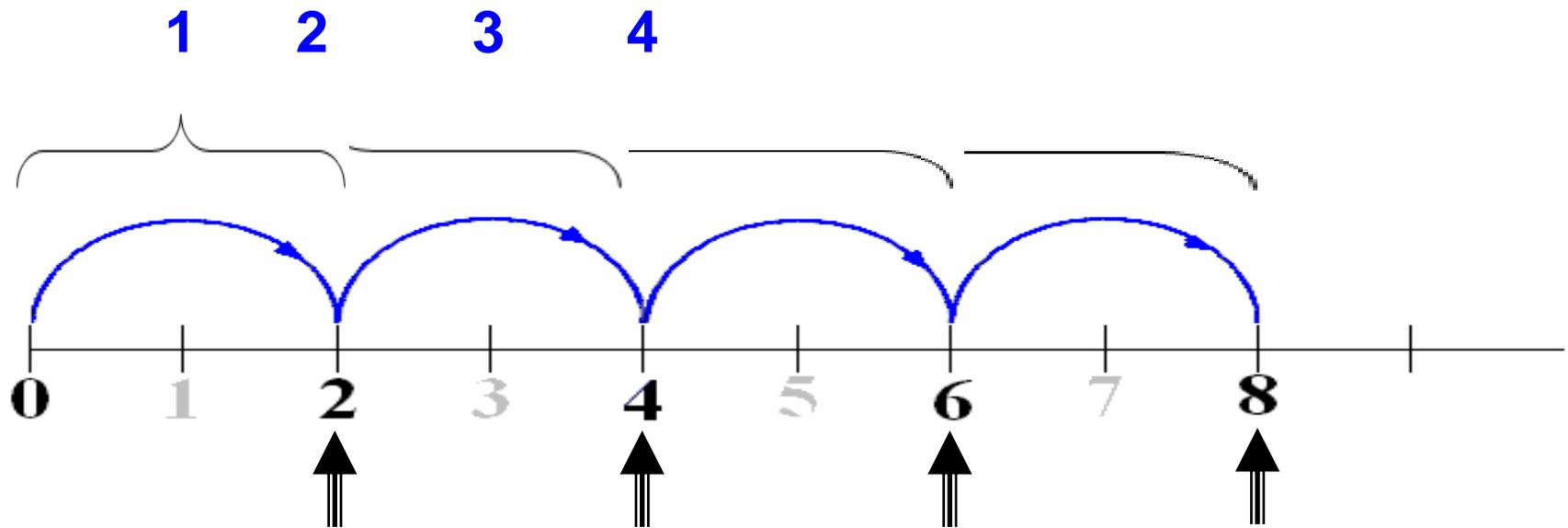
*Ex :  $8/4 \rightarrow$  arriver au point 8 en 4 sauts*



Le saut est un déplacement auquel on associe une longueur repérée par un nombre.

Facilite l'étude des équivalences et donc de la simplification des fractions.

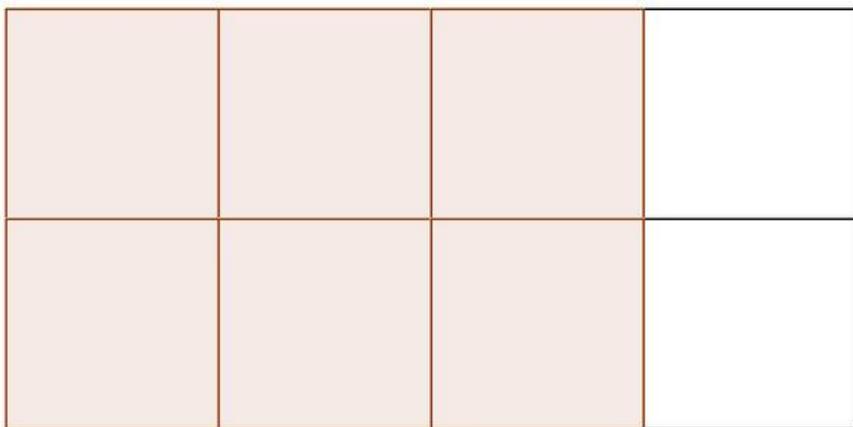
### 3 Approche par sauts ? .....



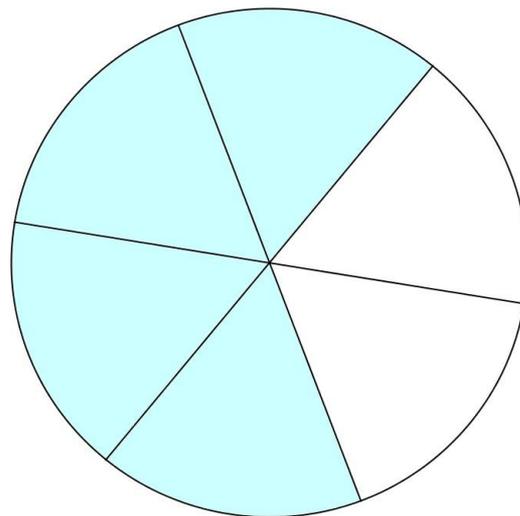
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

## 4 Approche par la mesure ? .....

La représentation s'appuie sur une représentation de partition de surface (souvent un disque ou un rectangle).



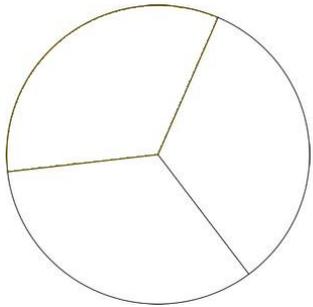
$$\frac{6}{8}$$



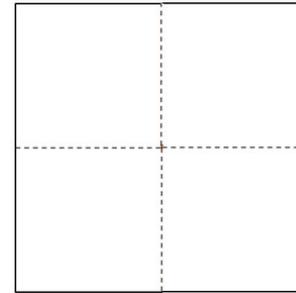
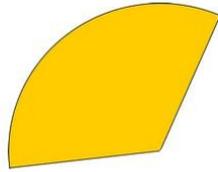
$$\frac{4}{6}$$

## 4 Approche par la mesure ? .....

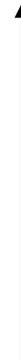
### Attention



unité



unité

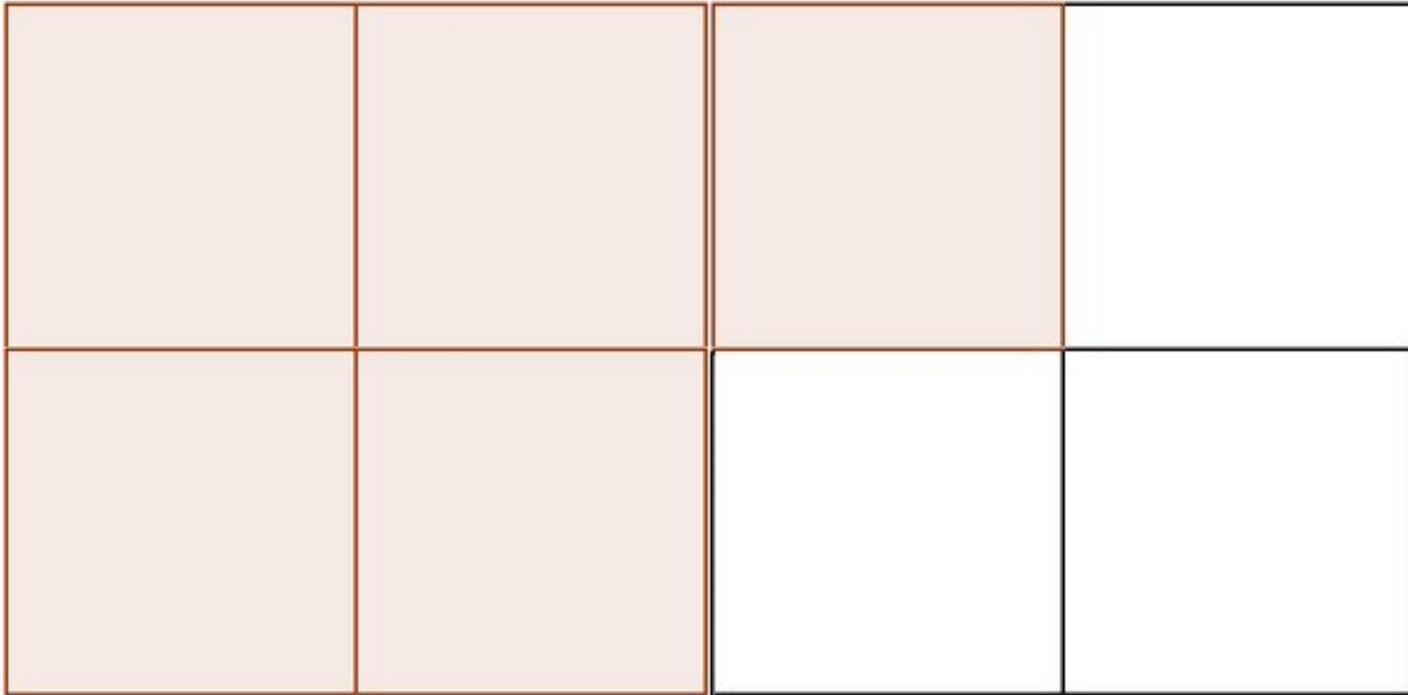


En absence d'unité  
de référence,  
on reconnaît toujours  
le tiers d'un disque

En absence d'unité  
de référence,  
on ne reconnaît pas  
le quart d'un rectangle

## 4 Approche par la mesure ? .....

Attention

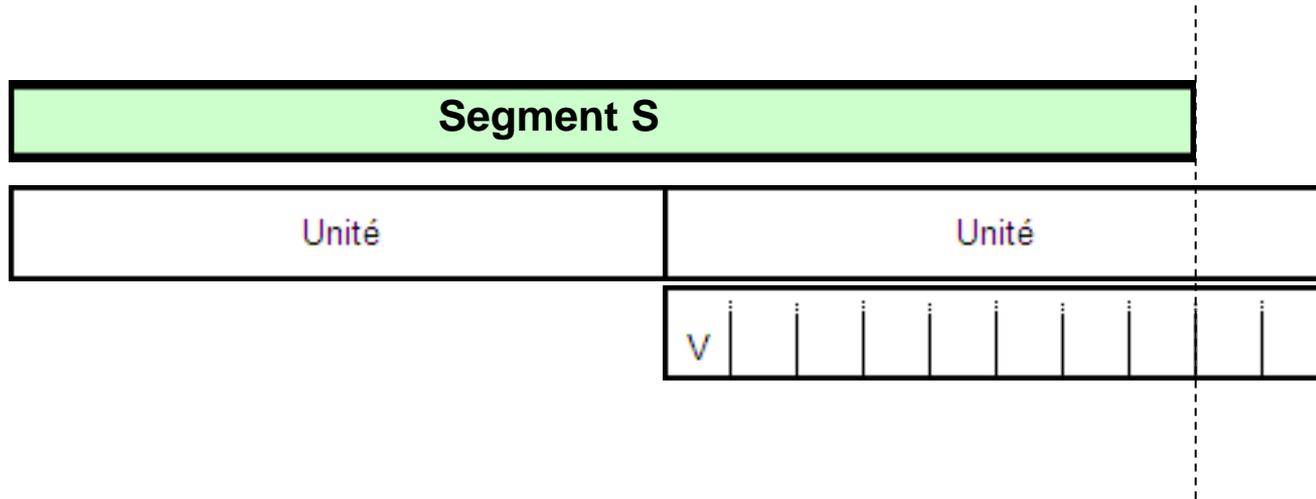


$$\frac{5}{4}$$

ou

$$\frac{5}{8}$$

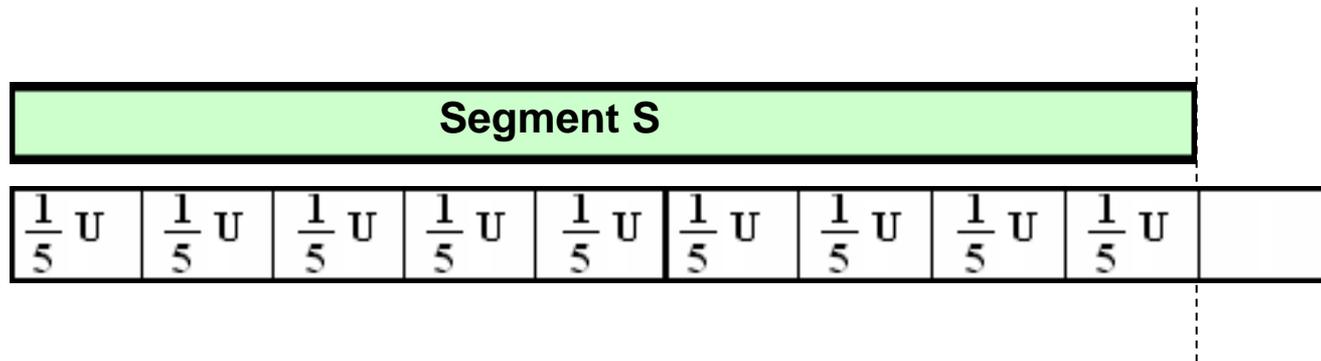
# Approche par un système de mesure ? .....



La longueur du segment S est de 1 Unité et 8 V  
(Unité partagée en 10 morceaux égaux :  $U = 10 V$   $V = 1/10 U$ ).

$$18V = 1U \quad 8V = 1,8 U$$

## 5 Approche par partage d'un segment ? .....



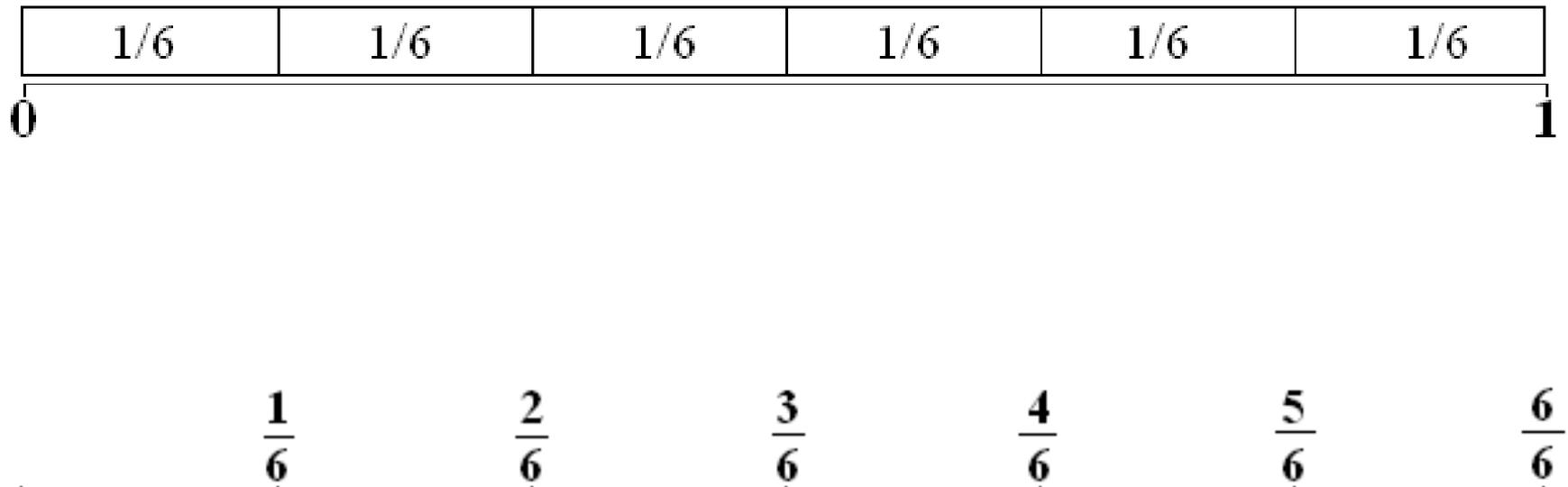
La longueur du segment S est plus grande que 1 Unité mais plus petit que 2 Unités.

La longueur du segment S est plus grande que 1 Unité et  $\frac{1}{2}$  Unité mais plus petite que 2 Unités

La longueur du segment S est de 1 Unité et 4 morceaux d'une Unité partagée en 5 (4 cinquièmes de U).

1 Unité et  $\frac{4}{5}$  d'Unité ou  $\frac{9}{5}$  Unité

## 5 Approche par partage d'un segment ? .....



Introduire la fraction dans un contexte de partition de la pluralité.

*Tom, Anna, Ben et Judith veulent partager un ruban équitablement pour fermer leurs cadeaux de fête des mères. Aide-les.*

**Partage d'une réalité continue adapté à la partition de la pluralité (prototype ruban)**

*Tom, Anna, Ben et  
pour se faire des sa*

*ement*

**Partage d'une r**

**raction de l'unité**



# Les fractions décimales

*Fractions dont le dénominateur est une puissance de 10*

$$\frac{74}{10}$$

$$\frac{740}{100}$$

$$740/100$$

Sept cent quarante  
centièmes

$$\frac{2300}{100} = \frac{230}{10} = \frac{23}{1} = 23$$

(10<sup>2</sup>)      (10<sup>1</sup>)      (10<sup>0</sup>)

$$\frac{7}{0}$$

# Introduire les nombres décimaux au C 3



s'appropriier le projet auquel  
répondent les décimaux



Surmonter les difficultés de  
conceptualisation inhérentes aux  
fractions qui ne sont pas unitaires

8,333333

$$= \frac{8333333}{100000}$$

*Nombre décimal pouvant être écrit sous la forme d'une fraction d'un entier divisé par une puissance de 10*

**Attention**

Tout nombre décimal possède une période infinie constituée de 0  
Ex :  $2,5 = 2,500000\dots$

8,333333 .....

$$= \frac{25}{3}$$

*le développement décimal est infini périodique*

0,714285714285714285

$$= \frac{5}{7}$$

*Nombre rationnel de période  $\neq 0$   
Peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est différent de  $10^n$*

3,14159265..

$$= \pi$$

*Le développement décimal est infini et non périodique*

Les décimaux permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut.

« Le filtre décimal »

## **il y a des ruptures à vivre au moment de l'introduction des écritures à virgule mais aussi certaines continuités.**

- 1 rupture : L'idée de prédécesseur et de successeur n'a plus de sens pour les décimaux.
- 2 rupture : Entre 2 entiers il y a un nombre fini d'entiers. Entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux.
- 3 rupture : Les règles de comparaison sont différentes de celles institutionnalisées sur les entiers.
- 4 continuité : Les techniques opératoires ne changent pas. Souvent mal transférées car appuyée sur des « trucs » plus que sur du sens mathématique.

## L'introduction de nouveaux nombres au cycle 3

Quoi qu'on fasse il y a une rupture au moment de l'introduction des écritures à virgule.

Certaines propriétés, certaines techniques de calcul qui étaient valables avec les entiers restent valables, d'autres ne le sont plus

**Le nombre qui a l'écriture la plus longue n'est pas nécessairement le plus grand** ( $2,123 < 2,45$ ) mais ça arrive ( $2,456 > 2,3$ ).

**Pour multiplier par 10, on n'ajoute pas un 0 à la fin** :  $1,6 \times 10$  ne vaut pas  $1,60$

Remarque : au cycle 2, il semble important de donner du sens à la multiplication par 10

( $25 \times 10$  c'est 25 « paquets de dix » et 25 « paquets de dix » ça s'écrit 250)

**Une écriture à virgule ce n'est pas « la juxtaposition de deux entiers »** et, pourtant de nombreux élèves font comme si c'était le cas :

$2,17 < 2,125$  car  $17 < 125$

$2,95 \times 2 = 4,190$

« Il n'y a pas de nombre entre  $1,16$  et  $1,17$  » (car il n'y a pas d'entiers entre 16 et 17)

*Colorie en rouge le chiffre des dixièmes :*

2 406,571

Construction par symétrie  
Autour de la virgule

*Calcule les opérations suivantes :*

$$16,5 + 9,3 = 25,8$$

$$10,2 \times 4 = 40,8$$

$$0,4 \times 0,3 = 0,12$$

$$2,8 + 1,3 = 3,11$$

$$10,3 \times 4 = 40,12$$

$$0,3 \times 0,3 = 0,9$$

Juxtaposition de deux entiers  
autour de la virgule

Application des « trucs » j'ajoute un zéro  
pour multiplier par 10, ....

$$67,4 \times 10 = 67,40$$

Vérifier que les élèves établissent les liens suivants :

### ECRITURES FRACTIONNAIRES

$$\frac{8}{4}$$

$$\frac{5}{4}$$

Pour l'élève,  $\frac{5}{4}$  représente-t-il aussi un

nombre où uniquement quelque chose qui permet « d'opérer sur les grandeurs » c'est-à-dire de faire des calculs du type?

$$\frac{5}{4} \times 200 \text{ g} = 250 \text{ g}$$

L'élève établit-il un lien ?

$$8 \quad 4 \quad 1 + \frac{1}{4}$$

$$8 : 4$$

### AUTRES ECRITURES

L'élève voit-il qu'on peut passer de  $\frac{5}{4}$  à  $1 + \frac{1}{4}$

en divisant 5 par 4 ?

$$\begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}$$

### ECRITURES A VIRGULE

Pour l'élève, l'écriture 1,25 représente-t-elle un nombre situé entre 2 entiers et non ,une juxtaposition de deux entiers (1,25 € = 1€ 25 c) ?  
Fait-il le lien avec la fraction 125/100 « réductible à 5/4 » ?

$$1,25$$



Dans son testament, le chef de la tribu bédouine a décidé de partager son troupeau entre ses trois fils :

- La moitié pour l'aîné
- Un tiers pour le cadet
- Un neuvième pour le dernier.

Le jour de sa mort il possède 17 chameaux.

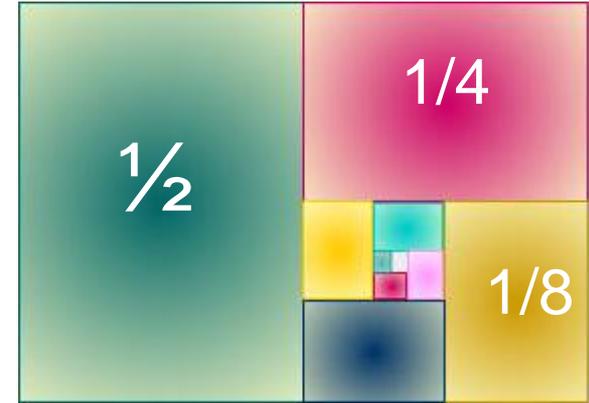
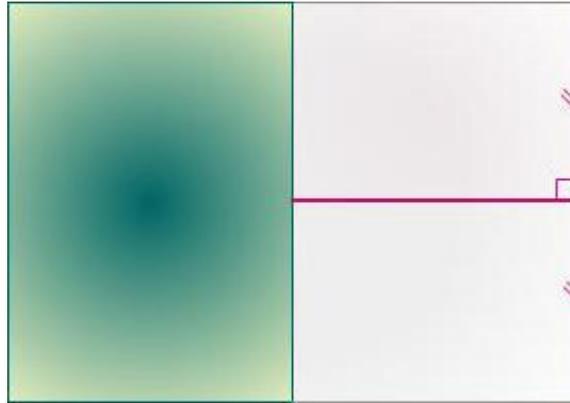
Comment les héritiers vont-ils faire pour exécuter les dernières volontés de leur père ?

Solution:

$$18/2 = 9 \quad 18/3 = 6 \quad 18/9 = 2$$

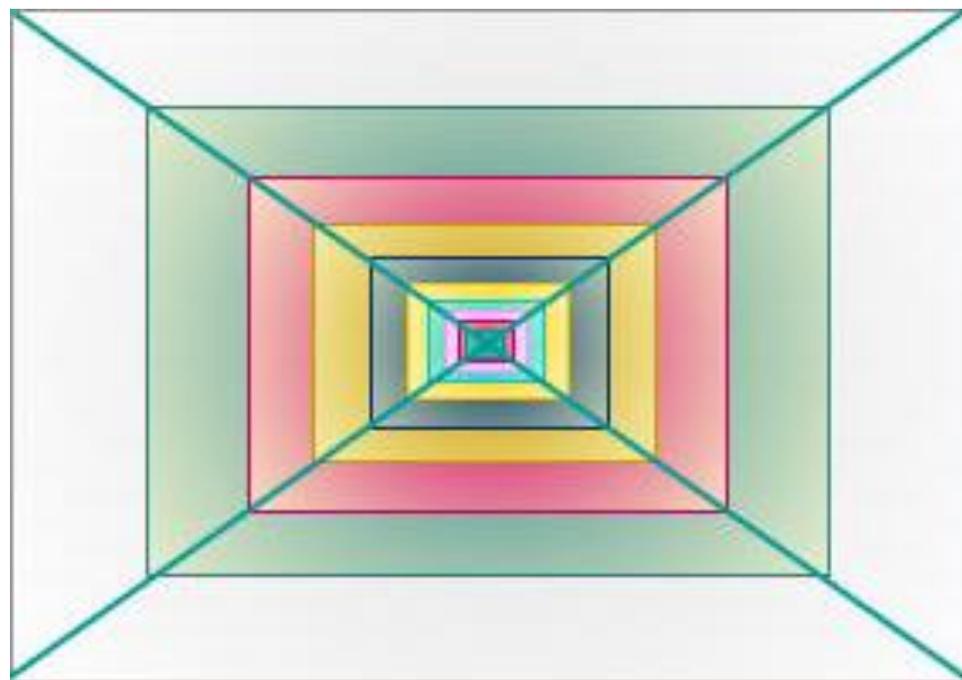
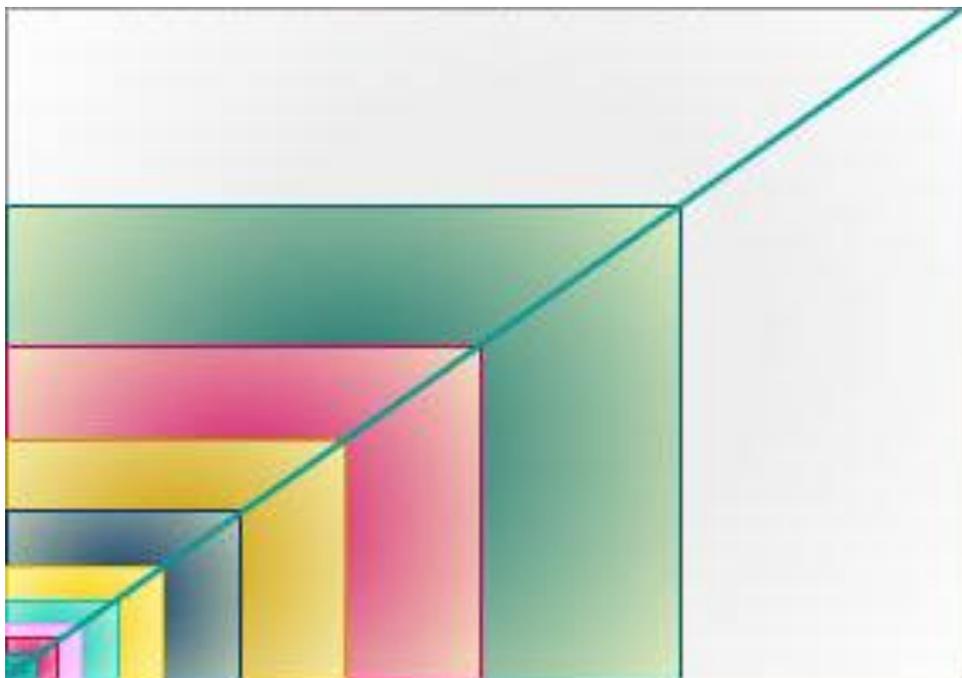
$$9 + 6 + 2 = 17$$

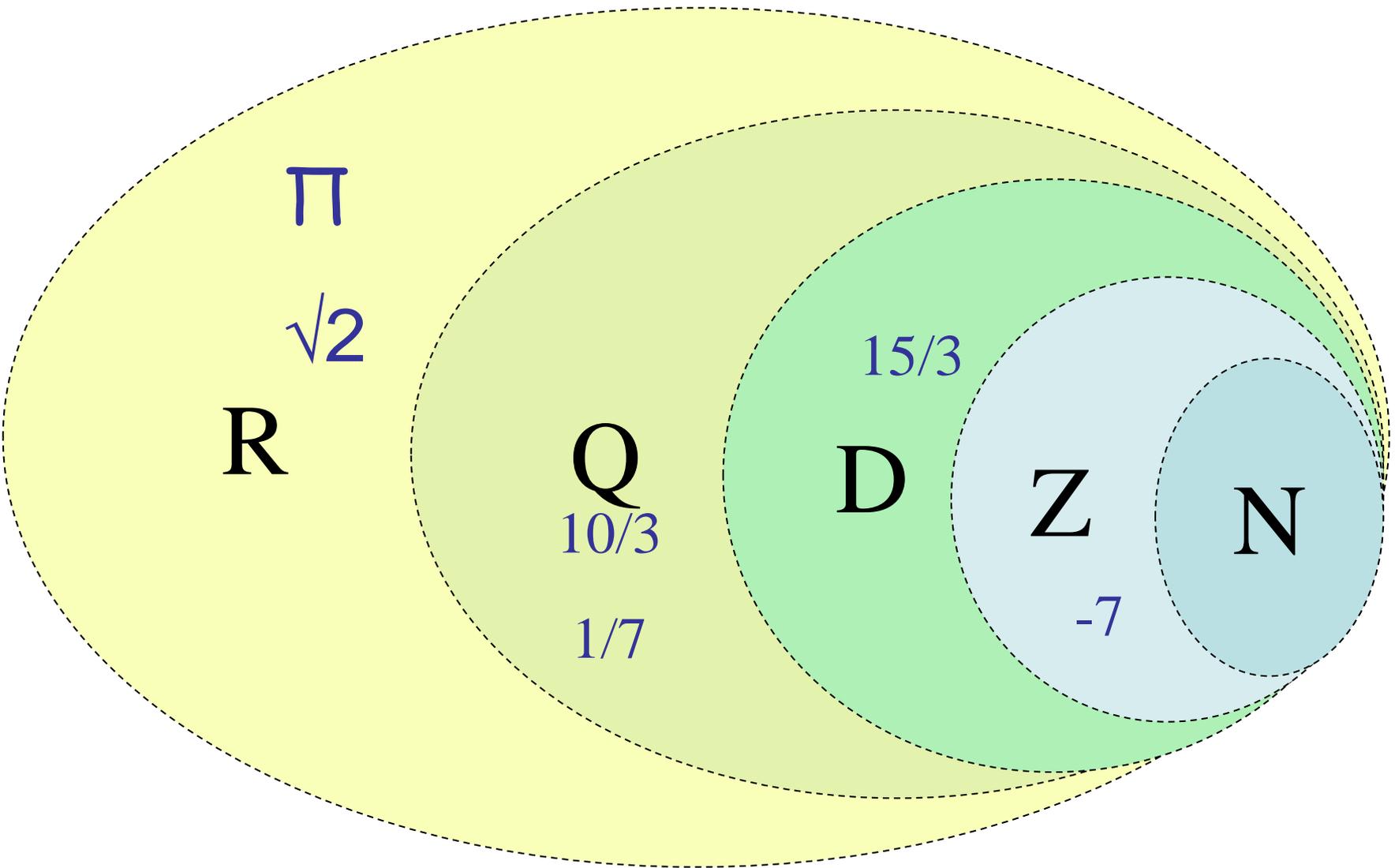
9 chameaux pour l'aîné, 6 chameaux pour le cadet et 2 chameaux pour le dernier des fils.



nous obtenons des morceaux dont l'aire est  
 $1/2$  puis,  $1/4$  ;  $1/8$  ;  $1/16$  ;  $1/32$  ;  $1/64$  ; etc...

# Les formats de type $A_n$





réels

rationnels

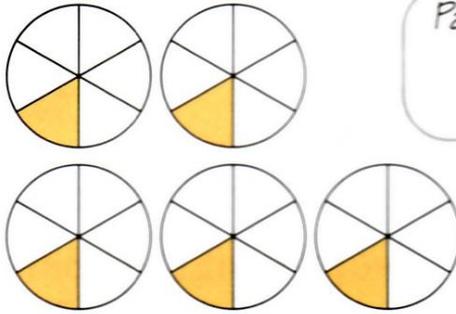
décimaux

relatifs

naturels

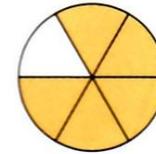
2

Observe comment Pato et Fino répondent à Mathilde.



1 sixième de la première et  
1 sixième de la seconde et  
1 sixième de la troisième et...

Pato et Fino, montrez-moi la grandeur d'une part  
quand on partage équitablement  
5 pizzas entre 6 personnes.



Je ne prends qu'une pizza.  
Je la découpe en 6 sixièmes et  
j'en prends 5 sixièmes.

### Je me rappelle

Il y a deux façons de représenter la part correspondant à 5 pizzas partagées équitablement entre 6 personnes :

- soit je prends 5 pizzas,  
je partage chacune en sixièmes et je prends une part dans chaque ;
- soit je prends 1 seule pizza,  
je la partage en sixièmes et j'en prends 5 parts.

$\frac{5}{6}$  se lit « 5 divisé par 6 » ; mais on peut le lire aussi « 5 sixièmes ».

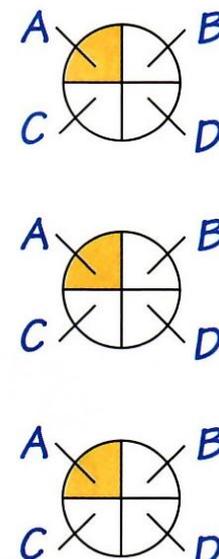
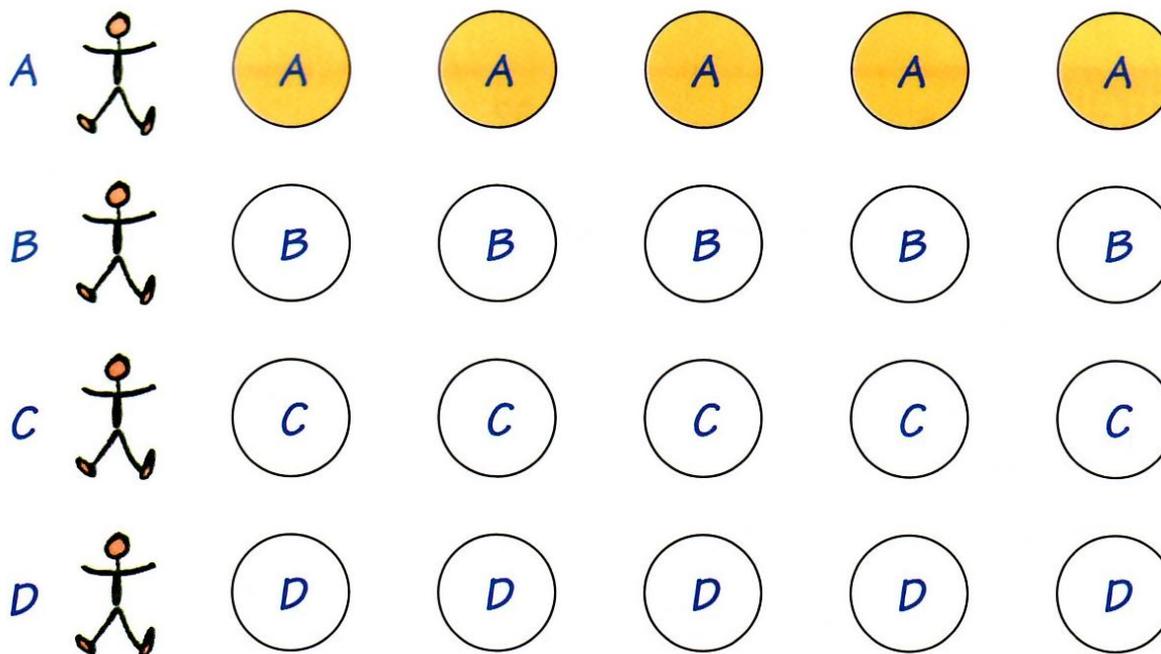
Dans la fraction  $\frac{3}{10}$

ce nombre est le **dénominateur**,  
il nous permet de **dénommer** la fraction  
(ici, se sont des dixièmes).

ce nombre est le **numérateur**,  
il nous indique le **nombre** de dixièmes  
(ici, il y en a 3).

a. On partage équitablement 23 tartelettes entre 4 personnes. Quelle sera la part d'une personne ?

Je calcule la division avec reste  $23 : 4 ?$   $q = 5$   
 $r = 3$  Il reste 3 qu'il faut aussi partager en 4.



On peut aussi écrire l'égalité  $\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ ,  
qu'on lit : « 23 divisé par 4 égale 5 plus 3 quarts » (ou « 5 plus 3 divisé par 4 »).

«Écris  $23/4$  sous la forme d'un entier et d'une fraction  $< 1$  »

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 20 \\ \hline 3 \end{array}$$

**4**

**5**

Vingt-trois quarts  
c'est  $23/4$

C'est donc 5 unités  
plus un reste que je dois  
encore partager en 4  
(*sans pouvoir obtenir  
d'unité entière*)

$$\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$$